МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою

«ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ»

з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та прискореної форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 17.05.2019 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

Методичні вказівки для самостійної роботи з курсу «Вища математика» за темою «Границі функції» для студентів технічних спеціальностей заочної та прискореної форм навчання / уклад. Г. Б. Лінник, І. О. Морачковська. – Харків : НТУ «ХПІ». – 36 с.

Укладачі: Г.Б. Лінник, І.О. Морачковська

Рецензент доц. С.М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

ВСТУП

«Границі» – перша тема, яка розглядається в курсі математичного аналізу. Тому дуже важливо розібратися з цим питанням, щоб в подальшому розуміти наступні теми цього важливого курсу. Часто питання за цією темою виникають у студентів, які мають проблеми з елементарною математикою. Отже, автори пропонують не тільки інформацію з вищої математики, але й потрібний для вивчення границь матеріал з елементарної математики. Коли в тексті зустрічається такий символ ☺, то після нього розташовані деякі важливі формули з елементарної математики, на які буде посилання в подальшому викладенні матеріалу.

Методичні вказівки складаються з чотирьох розділів: найпростіші границі, перша важлива границя, друга важлива границя, та неперервність функції. Ці вказівки повинні допомогти студентам, які не встигли зрозуміти матеріал на лекції та практичних заняттях. Викладення матеріалу дуже повільно з детальними поясненнями. Після кожного розділу наведено задачі для самостійного розв’язання, щоб студенти могли самостійно перевірити на скільки ними засвоєно матеріал.

1. НАЙПРОСТІШІ ГРАНИЦІ

Серед найпростіших границь розглянемо декілька типів:

0-й тип

До цього типу включено границі, які не потребують спеціальних методів для обчислення, тому що в них не має невизначеності. Розглянемо приклад:

- ❖ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-7}{5-2x} = \left\| \dfrac{3 \cdot 2 - 7}{5 - 2 \cdot 2} \right\| = \left\| \dfrac{-1}{1} \right\| = -1.$

В цьому прикладі ми скористувалися теоремою про арифметичні дії над границями функцій. Замість x підставили значення 2, до якого невідома прямує. Та одержали відповідь. Наведемо ще декілька прикладів для кращого розуміння:

- ❖ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+\sqrt{3+x}}{x^2} = \left\| \dfrac{3+\sqrt{3+3}}{3^2} \right\| = \left\| \dfrac{3+\sqrt{6}}{9} \right\| = \dfrac{3+\sqrt{6}}{9}.$
- ❖ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x + 1}{x^3+2} = \left\| \dfrac{\cos 0 + 1}{0^3+2} \right\| = \left\| \dfrac{1+1}{0+2} \right\| = 1.$
- ❖ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3+2} = \left\| \dfrac{\sin 0}{0^3+2} \right\| = \left\| \dfrac{0}{0+2} \right\| = 0.$

В останньому прикладі немає невизначеності, оскільки 0 можна поділити на довільне ненульове число та отримати 0.

- ❖ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-6}{x^3-1} = \left\| \dfrac{1-6}{1^3-1} \right\| = \left\| \dfrac{-5}{0} \right\| = \infty.$

Цей приклад потребує пояснень. З курсу елементарної математики відомо, що ділити на 0 неможливо. Звісно це так, але коли розглядається границя, невідома тільки прямує до 1 та ніколи не дорівнює їй. Тобто ми ділимо не на чистий 0, а величину нескінченно малу. Проілюструємо це за допомогою таблиці.

x	1	0,1	0,01	0,05	0,001	0,0001	…
$\dfrac{1}{x}$	1	10	100	500	1000	10000	…

Проаналізуємо результати таблиці: чим ближче до 0 стає значення невідомої x, тим більше стає значення $\dfrac{1}{x}$. Звідси випливає, що $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\to} \infty$ або $\left\| \dfrac{1}{0} \right\| = \infty$.

1-й тип

По-перше розберемо випадок, коли в чисельнику та знаменнику дробу знаходяться поліноми.

☺ *Поліномом* або *многочленом* називається така функція:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,\ \ a_n\neq 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ є сталі, а число n є *степенем* полінома.

Наведемо декілька прикладів:

$7x^4-x^2+3$ – поліном 4 степеня, оскільки максимальна степінь змінної x дорівнює 4;

$13x^3-5x^7+3x$ – поліном 7 степеня, оскільки максимальна степінь змінної x дорівнює 7;

7 – поліном 0 степеня, оскільки максимальна степінь змінної x дорівнює 0;

$6x^2-\sqrt{x}+\frac{5}{x}$ – не є поліномом, оскільки поліном складається з суми натуральних степенів змінної x.

Розберемо перший приклад:

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-x^2+3}{3x^4+8x^2-x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4}{3x^4}=\frac{7}{3}.$

Пояснення: оскільки x прямує до нескінченності $(x\to\infty)$, то головна частина полінома дорівнює x в максимальному степені зі своїм коефіцієнтом.

Для кращого розуміння розберемо ще декілька прикладів:

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-x^2+3x}{9x^4-7x^2-5}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3}{9x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{9x}=\left\|\frac{8}{\infty}\right\|=0.$

Пояснення: якщо сталу величину поділити на нескінченно велику одержимо нескінченно малу.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^6+x^5-3}{x^4+7x^2-x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^6}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{1}=\infty.$

Оскільки нескінченність знаходиться у чисельнику, а знаменник – стала величина, то одержимо нескінченність у відповіді.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^5-x^2+7}{7x^4-8x^5+9}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^5}{-8x^5}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}.$

Будьте обережними з коефіцієнтом при невідомій, знак коефіцієнта потрібно брати до уваги.

2-й тип

Звернемося до більш складного випадку, коли до дробу входять радикали.

☺ Нагадаємо декілька важливих формул для переведення радикалів у степені:

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}},\quad \sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}.$$

Наведемо декілька прикладів:

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt[7]{a^5}=a^{\frac{5}{7}},\quad \sqrt{16a}=4\cdot a^{\frac{1}{2}}.$$

❖ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+3}+\sqrt[3]{x+5}}{8x^2-3x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt[3]{x}}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x^{\frac{1}{3}}}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\frac{1}{8}.$$

Пояснення: спочатку замінимо поліноми на їх головні частини. Далі порівняємо степені $2>\frac{1}{3}$ і залишимо найбільший у чисельнику та знаменнику.

❖ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^5+2x-7}+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{27x^3+6x^2-7}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^5}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{27x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Пояснення: спочатку замінимо поліноми на їх головні частини. Далі порівняємо степені $\frac{5}{5}>\frac{1}{2}$ і залишимо найбільший у чисельнику та знаменнику з коефіцієнтами.

❖

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^4+x^2-5}+3x-7}{\sqrt[4]{4x^5+2x-3}-2x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5x^4}+3x}{\sqrt[4]{4x^5}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5}x^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[4]{4}x^{\frac{5}{4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{5}x^{\frac{1}{12}}}{\sqrt[4]{4}}=\infty.$$

Пояснення: спочатку замінимо поліноми на їх головні частини. Нагадаємо, що при діленні показники віднімаються $\frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{1}{12}$ і одержимо невідому в чисельнику. Тому відповідь: нескінченність.

3-й тип

Заміняти поліноми на головні частини можна не завжди. Розглянемо приклад:

❖ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\|\infty-\infty\|$$

Якщо оставити головні частини, то ми одержимо неправильний розв'язок:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\left\|\infty-\infty\right\|=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x\right)=0.$$

Оскільки головні частини взаємно знищуються, то мають значення й ті величини, якими ми знехтували. Отже потрібно знайти якийсь інший метод розв'язання. Було б гарно, якщо можна було б позбавитись кореня і такий метод існує!

☺ Нагадаємо формули скороченого множення:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(a-b)=\frac{a^2-b^2}{(a+b)}$$

Скористаємося вказаною формулою:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\left\|\infty-\infty\right\|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Отже правильна відповідь в цьому прикладі $\frac{1}{2}$ і це не співпадає з відповіддю 0, яку ми одержали використовуючи некоректний метод розв'язання.

❖ $$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\left\|\infty\cdot(\infty-\infty)\right\|=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x^3+1-\left(x^3-1\right)}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{x^3}}=\frac{2}{2}=1.$$

Зауважимо, що в знаменнику можна оставити тільки головні частини, оскільки вони не знищуються.

4-й тип

У попередніх типах розглянуто приклади, коли невідома прямує до нескінченності. Але для функції невідома може прямувати і до кінцевих значень.

❖ $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-3}=\left\|\frac{1-1}{2+1-3}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Одержали нову невизначеність. Пам’ятаємо, що ми ділимо не точні нулі, а нескінченно малі значення. Розкладемо на множники чисельник та знаменник. Для цього нам потрібні деякі формули з елементарної математики

☺ Формули скороченого множення:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right).$$

Розкладання квадратного тричлена:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 корені відповідного квадратного рівняння.

Чисельник розкладемо за першою формулою: $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Знаменник за останньою, для цього спочатку знайдемо корені квадратного рівняння.

☺ Розв’язання квадратного рівняння:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac.$$

$$2x^2+x-3=0 \Rightarrow D=1-4\cdot 2\cdot(-3)=25,\ x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{4} \Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

Після цього за формулою:

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

Потрібно пам’ятати про коефіцієнт $a=2$. Підставимо усі одержанні розкладання в наш приклад:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{2x+3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}.$$

На другому кроці ми можемо скоротити дріб та наша невизначеність зникає.

❖ $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^3+8}=\left\|\frac{4-2-2}{-8+8}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)}{\left(x^2-2x+4\right)}=$$

$$=\left\|\frac{(-2-1)}{(4+4+4)}\right\|=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}.$$

В цьому прикладі ми знову повинні розкласти чисельник та знаменник на множники за вище вказаними формулами. В знаменнику формула суми кубів. В чисельнику корені: $x_1 = 1, x_2 = -2$.

5-й тип

❖ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x^2-9}=\left\|\frac{3-3}{9-9}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3x}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3x}+3\right)}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(\sqrt{3x}+3\right)}=.$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{(x-3)\cdot(3+3)\cdot\left(\sqrt{3\cdot 3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)\cdot 6\cdot 6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Знов, як у 3-му типу, ми позбавляємося ірраціональності в чисельнику. Для цього необхідно помножити на спряжений вираз $\left(\sqrt{3x}+3\right)$ чисельник та знаменник водночас. Після цього одержимо формулу: різниця квадратів. Також зауважимо, що множники, які прямують до не нульових чисел можна замінювати сталими, що й зроблено у знаменнику $(x+3)\underset{x\to 3}{\to}6$, $\left(\sqrt{3x}+3\right)\underset{x\to 3}{\to}6$.

❖ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{x+7}}=\left\|\frac{2-2}{3-3}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)-2^2}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=.$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3^2-(x+7)\right)\cdot(2+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3+3)}{(2-x)\cdot 4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

В цьому прикладі потрібно помножити на спряжене і чисельник і знаменник.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обчислити границі функцій

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^2-5x+1\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3+3}{x-2x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{4x^3+3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^3-8}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{(2-x)\left(3+x^2\right)}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$

8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

10 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-x+4}{2x^3-4x^2+3}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x+5}{2x^2+3x^2+3}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5+4x^4-2}{7x^3-2x+5}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^4+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+13}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^6-9x^2+3}}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{25x^6+x-2}+\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{27x^9+5x^4-4x}}$

2. ПЕРША ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

Важлива границя має наступний вигляд

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1}.$$

Означення. Дві нескінченно малі функції $f(x)$ та $g(x)$ називаються **еквівалентними** при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=1$.

Отже за означенням еквівалентних замість першої важливої границі можна написати $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Наслідки першої важливої границі

Наслідки першої важливої границі сформулюємо у вигляді **таблиці еквівалентних нескінченно малих при** $x\to 0$

1. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$;
2. $\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;
3. $\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

☺ Нагадаємо деякі значення тригонометричних функцій:

$$\sin 0=0,\quad \cos 0=1,\quad \operatorname{tg} 0=0,\quad \operatorname{arctg} 0=0,\quad \arcsin 0=0,\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2},$$

$\operatorname{ctg} 0$ не існує.

Спочатку доцільно ознайомитися з прикладами заміни нескінченно малих функцій еквівалентними величинами:

- ❖ $\sin 7x \underset{\substack{x\to 0\\ 7x\to 0}}{\sim} 7x$;
- ❖ $1-\cos 3x \underset{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}{\sim} \dfrac{(3x)^2}{2}=\dfrac{9x^2}{2}$;
- ❖ $\arcsin\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$;

❖ $\cos 5x - 1 \underset{\substack{x\to 0\\ 5x\to 0}}{\sim} -\dfrac{(5x)^2}{2} = -\dfrac{25x^2}{2}$;

❖ $\operatorname{arctg}^2 4x \underset{x\to 0}{\sim} (4x)^2 = 16x^2$;

❖ $\sin(x+2) \underset{\substack{x\to -2\\ x+2\to 0}}{\sim} x+2$;

❖ $\arcsin(x-3)^2 \underset{\substack{x\to 3\\ x-3\to 0}}{\sim} (x-3)^2$.

Зауваження: не має значення до чого прямує змінна x, головне, щоб аргумент функції прямував до 0.

Розглянемо приклади обчислення границь за допомогою першої важливої границі.

❖ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{arctg} 6x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{6x} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\arcsin 2x^2} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)^2}{2\cdot 2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{4x^2} = 1$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\cos x - 1} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3x)^2\cdot 2}{-x^2} = \dfrac{18}{-1} = -18$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 7x}{x^2+3x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-7x}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4}{(x+3)} = -\dfrac{4}{3}$.

❖ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\cdot \operatorname{arctg} 4x}{\cos x - \cos 2x} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 4x}{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{-2\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{-x}{2}} = \dfrac{4\cdot 2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

В останньому прикладі скористались формулою з тригонометрії. Нагадаємо декілька корисних формул.

☺ Формули з тригонометрії:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

❖ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(3-x)}{x^2-9}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)}{(x-3)\cdot(x+3)}=-\dfrac{1}{3}$.

Аргумент функції $(3-x)$ прямує до 0, якщо змінна x прямує до 3. Тому можна застосувати еквівалентність $\sin(3-x)\underset{\substack{x\to 3\\ 3-x\to 0}}{\sim}3-x$.

❖ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{tg(x-1)}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+4)}{1}=5$.

Знову застосовуємо еквівалентність $\operatorname{tg}(x-1)\underset{\substack{x\to 1\\ x-1\to 0}}{\sim}x-1$. Чисельник розкладемо на множники враховуючи корені рівняння: $x_1=1,\ x_2=-4$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Обчислити границі функцій за допомогою таблиці еквівалентних нескінченно малих

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{arctg} 4x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 3x-\cos 5x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg} 8x-\operatorname{tg} 4x}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sin(x-2)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{\sin^2 5x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\operatorname{tg} 3x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg} x}{(1-\cos 4x)}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\arcsin^2 5x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x}{\sin 3x}$
13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x^3}{x(1-\cos x)}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4\sin x^2}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{tg} 3x}{\sin x^2}$
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\operatorname{tg} 2x}{\sin^3 3x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x\cdot\operatorname{tg} 2x}{\sin^2 3x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg} 6x\cdot\sin x}$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x^2}{1-\cos^2 x}$
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x^3}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sin^2 3x}$

3. ДРУГА ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

Друга важлива границя дозволяє розкривати невизначеності виду одиниця в степені нескінченність $\left\| 1^{\infty} \right\|$. Важлива границя має наступний вигляд

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}, \qquad (1)$$

де "e" – експонента. Число e ірраціональне. Приблизне значення цього числа таке: $e \approx 2{,}718281828459045$.

Якщо зробити заміну $t=\frac{1}{x}$, то формулу (1) можна переписати в наступному вигляді:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e}. \qquad (2)$$

Зауважимо, що як і для першої важливої границі, не має значення, який вираз стоїть замість змінної x у формулі (1) або замість змінної t у формулі (2). Головне щоб:

- ✓ Основа степеню (тобто вираз у дужках формул (1) і (2)) прямував до одиниці
- ✓ Показник степеню (тобто x у формулі (1) або $\frac{1}{t}$ у формулі (2)) прямував до нескінченності ($x\to\infty$, $\frac{1}{t}\to\infty$).

Розглянемо приклади:

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}$.

Розв'язання. Зауважимо, що основа степеню (тобто $\frac{2x+1}{2x-3}$) прямує до одиниці

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Показник степеню (тобто $5x-2$) прямує до нескінченності

$$\lim_{x\to\infty}(5x-2)\to\infty.$$

Таким чином основа степеню прямує до одиниці, показник степеню – до нескінченності, тобто маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$. Скористаємося формулою (1) для розкриття невизначеності. У формулі (1) в основі степеню стоїть вираз $\left(1+\frac{1}{x}\right)$, а в нашому прикладі $\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)$. Тому у першу чергу треба звести вираз $\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)$ до виду $\left(1+\frac{1}{x}\right)$, де x прямує до нескінченності.

Спочатку додамо та віднімемо одиницю

$$\frac{2x+1}{2x-3}=1+\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right).$$

Зведемо вираз у дужках до спільного знаменника

$$1+\frac{2x+1-2x+3}{2x-3}=1+\frac{4}{2x-3}.$$

Таким чином, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{5x-2}.$$

У виразі $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ формули (1) у чисельнику дробу знаходиться 1, а в нашому виразі $\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)$ у чисельнику 4. Щоб отримати 1 у чисельнику, опустимо 4 у знаменник наступним чином

$$1+\frac{4}{2x-3}=1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}.$$

Зауважимо, що при $x\to\infty$ $\frac{2x-3}{4}$ прямує до нескінченності, $\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}$ прямує до нуля, а це означає, що вираз $1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}$ (тобто основа степеню) прямує до одиниці.

Таким чином, основа степеню, тобто вираз $1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}$, зведено до вигляду $1+\frac{1}{x}$, який потребує формула (1).

Розглянемо показник степеню. Зауважимо, що у формулі (1) вирази, які стоять у знаменнику дробу і у показнику однакові. Це означає, що показник степеню і знаменник у нашому прикладі треба звести до однакового виду. Для цього помножимо показник (тобто $5x-2$) на $\frac{2x-3}{4}$ і на обернену дріб $\frac{4}{2x-3}$:

$$5x-2=\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4}{2x-3}(5x-2).$$

Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4}{2x-3}(5x-2)}.$$

Вираз $\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}}$ повністю відповідає формі запису другої важливої границі (1). Це означає, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}}=e.$$

Зауважимо, що для неперервних функцій знак границі і функції можна міняти місцями. Враховуючи це, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4}{2x-3}(5x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(5x-2)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x}{2x}}=e^{10}.$$

Повне розв'язання без пояснень можна записати так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{5x-2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-3}(5x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(5x-2)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x}{2x}}=e^{10}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-2}=e^{10}$.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}$

Розв'язання. З'ясуємо, яку невизначеність має границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{5x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{5x^2}=1$$

(детальне пояснення викладено у §1). Таким чином маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$, яку будемо розкривати за формулою (1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^2+1}{5x^2-4}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x^2+1-5x^2+4}{5x^2-4}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{5x^2-4}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x^2-4}{5}}\right)^{\frac{5x^2-4}{5}}\right]^{\frac{5\cdot 2x}{5x^2-4}}==e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{5x^2-4}}=e^0=1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}=1.$

☺ Нагадаємо деякі властивості логарифмів

1) Основна логарифмічна тотожність $a^{\log_a b}=b$.

2) $\log_a 1=0$.

3) $\log_a a=1$.

4) $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.

5) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

6) $\log_a b^n=n\cdot\log_a b$.

Частинні випадки:

$\log_{10} a=\lg a$ – десятковий логарифм;

$\log_e a=\ln a$ – натуральний логарифм.

Розглянемо приклади.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

☺ Спочатку перетворимо вираз у дужках за допомогою властивостей логарифмів ($\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}$).

При $x > 0$ маємо $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

Розкладаємо дріб на суму дробів $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

☺ На останньому етапі скористалися властивістю логарифмів $n\ln x = \ln x^n$. Поміняємо місцями знак границі і натурального логарифма

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) = 1$

Наслідки другої важливої границі

Наслідки другої важливої границі сформулюємо у вигляді **таблиці еквівалентних нескінченно малих при** $x \to 0$

1. $e^x - 1 \sim x$
2. $a^x - 1 \sim x\ln a$
3. $\ln(1+x) \sim x$
4. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
5. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$
6. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

Спочатку доцільно ознайомитися з прикладами заміни нескінченно малих функцій еквівалентними величинами:

❖ $\log_2(1+5x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{5x}{\ln 2}$;
$5x\to0$

❖ $e^{x^2} - 1 \underset{x\to0}{\sim} x^2$;
$x^2\to0$

❖ $2^{\sqrt{x}}-1 \underset{\substack{x\to 0\\ \sqrt{x}\to 0}}{\sim} \sqrt{x}\ln 2$;

❖ $\ln(1-3\text{x}) \underset{\substack{x\to 0\\ (-3x)\to 0}}{\sim} -3x$;

❖ $\sqrt[3]{1-2x}-1 \underset{\substack{x\to 0\\ (-2x)\to 0}}{\sim} \frac{1}{3}(-2x)=-\frac{2}{3}x$;

❖ $2^x-3^x=3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)\underset{x\to 0}{\sim} x\cdot\ln\frac{2}{3}$;

❖ $\ln\left(1+2\,\mathrm{tg}^3 5x\right)\underset{x\to 0}{\sim} 2\,\mathrm{tg}^3 5x \underset{x\to 0}{\sim} 2\cdot(5x)^3=250x^3$;

❖ $\ln(2-x)=\ln(1+(1-x)) \underset{\substack{x\to 1\\ (1-x)\to 0}}{\sim} 1-x$;

❖ $3^{x-5}-1 \underset{\substack{x\to 5\\ (x-5)\to 0}}{\sim} (x-5)\ln 3$;

❖ $\sqrt[5]{\sin^2 x+1}-1 \underset{\substack{x\to 0\\ \sin^2 x\to 0}}{\sim} \frac{1}{5}\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{5}x^2$;

❖ $\ln\cos 2x=\ln(1+\cos 2x-1) \underset{\substack{x\to 0\\ \cos 2x\to 1\\ \cos 2x-1\to 0}}{\sim} \cos 2x-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2}=2x^2$.

Наведемо приклади використання таблиці.

❖ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

Розв'язання. Розглянемо чисельник. Скористаємося формулою 2 таблиці. Маємо $2^{3x}-1 \underset{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}{\sim} 3x\ln 2$.

Розглянемо знаменник. Скористаємося формулою 3 таблиці. Маємо $\ln(1+2x) \underset{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}{\sim} 2x$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\ln 2}{2x}=\frac{3}{2}\ln 2$.

❖ $$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{\log_3(1+7x)}=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Розв'язання. Розглянемо чисельник. Спочатку винесемо множник 3^x за дужки, щоб звести вираз до табличного виду. Скористаємося формулою 2 таблиці. Маємо $5^x-3^x=3^x\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x-1\right)\underset{x\to 0}{\sim} x\ln\frac{5}{3}$.

Розглянемо знаменник. Скористаємося формулою 3 таблиці. Маємо $\log_3(1+7x)\underset{\substack{x\to 0\\ 7x\to 0}}{\sim}\frac{7x}{\ln 3}$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{\log_3(1+7x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{5}{3}}{\frac{7x}{\ln 3}}=\frac{1}{7}\cdot\ln 3\cdot\ln\frac{5}{3}$.

❖ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$$

Розв'язання. Розглянемо чисельник. Скористаємося формулою 6 таблиці. Маємо $1-\sqrt{1-x^2}=-\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\underset{\substack{x\to 0\\ x^2\to 0}}{\sim}-\frac{1}{2}\left(-x^2\right)=\frac{x^2}{2}$.

Розглянемо знаменник. Скористаємося формулою 6 таблиці. Маємо $\sqrt[3]{1+2x}-1\underset{\substack{x\to 0\\ 2x\to 0}}{\sim}\frac{2x}{3}$.

Таким чином

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{2x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 3}{2\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4}=0.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обчислити границі функцій за допомогою таблиці еквівалентних нескінченно малих

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+5x)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1+x)}{e^{2x}-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{2\ln(1+x)}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{\ln(1-3x)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{(1+3x)^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{3^{2x}-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^3}}{x\ln\left(1+2x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{\ln(1-5x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-e^{x}}{5x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^2-1}{\ln(1-x)}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1+x^3\right)^5}{x\ln\left(1-4x^2\right)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^{2x}\right)\sin 2x}{\ln\left(1+x^2\right)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+3x\right)\mathrm{tg}\,3x}{\left(\sqrt[4]{8x^2+1}-1\right)}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^2\right)^3-1}{\sin(x/2)\log_3(1-x)}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{x/3}-1\right)}{2(1-\cos 2x)}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_4\left(1+x^2\right)}{\arcsin x\left(e^{2x}-1\right)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\mathrm{tg}\,3x}{5^{x^3}-1}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{x}}{\ln^2(1-5x)}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{5\sin 4x}$

Розкриття невизначеності $\left\|1^{\infty}\right\|$ за формулою

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u^v = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v}} \qquad (3)$$

Розглянемо приклади:

❖ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Розв'язання. Основа степеню (тобто $\cos 2x$) прямує до одиниці при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x) = 0.$$

Показник степеню $\left(\frac{1}{\sin^2 3x}\right)$ прямує при $x\to 0$ до нескінченності

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 3x} = \left\|\frac{1}{0}\right\| = \infty.$$

Таким чином маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$. Скористаємося формулою (3). В нашому прикладі $u=\cos 2x$, $v=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \left\|1^{\infty}\right\| = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(\cos 2x-1)\cdot\frac{1}{\sin^2 3x}} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\cos 2x-(1)}{\sin^2 3x}}.$$

Розглянемо границю, яку отримали у показнику. Зауважимо, що чисельник і знаменник дробу (тобто $\cos 2x-1$ і $\sin^2 3x$) прямують до нуля

$\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x-1=0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x=0$.

Таким чином маємо невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 3x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Для розкриття цієї невизначеності скористаємося наслідками першої важливої границі. Розглянемо чисельник. За формулою (5) таблиці маємо

$$\cos 2x-1 = -(1-\cos 2x) \underset{\substack{x\to 0\\ 2x\to 0}}{\sim} = -\frac{(2x)^2}{2} = -2x^2.$$

Розглянемо знаменник. За формулою (1) таблиці маємо:

$$\sin^2 3x \underset{\substack{x\to 0\\ 3x\to 0}}{\sim} (3x)^2 = 9x^2 .$$

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^2}{9x^2}=-\dfrac{2}{9}$.

Остаточно маємо

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)}{\sin^2 3x}} = e^{-\frac{2}{9}} .$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = e^{-\frac{2}{9}}$.

❖ $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$.

Розв'язання. Оскільки x прямує до одиниці $(x\to 1)$, основа степеню прямує до одиниці, а показник до нескінченості

$$\lim_{x\to 1}(4-3x)=1, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\left\|\frac{1}{0}\right\|=\infty .$$

Детальний опис знаходження границь даних типів викладений в §1. Таким чином, маємо невизначеність типу $\left\|1^\infty\right\|$, яку будемо розкривати за формулою (3)

$$\lim_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 1}(4-3x-1)\cdot\frac{x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3-3x)x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3(x-1)x}{(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}(-3x)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} .$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}} = \dfrac{1}{e^3}$.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}$.

Розв'язання. Ця границя вже була розглянута раніше та отримана відповідь 1. Тепер обчислимо цю границю за формулою (3).

В даному прикладі $u=\dfrac{5x^2+1}{5x^2-4}$, $v=2x$. Отже, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}-1\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1-5x^2+4}{5x^2-4}\right)\cdot 2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cdot 2x}{5x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{5x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=e^0=1.$$

Отже, відповідь співпадає з одержаною раніше.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2-4}\right)^{2x}$ =1.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{5x^2+2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\|1^{\infty}\right\|$. За формулою (3) маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{5x^2+2}=\left\|1^{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot\left(5x^2+2\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2}\right)\cdot\left(5x^2+2\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2}\cdot}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2}\cdot}=e^5.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{5x^2+2}=e^5$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обчислити границі функцій

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{5x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{3x}\right)^{x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{5x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2}\right)^{x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2}\right)^{3x-2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x^2+2x-3}\right)^{x^2+2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{3x^2-1}\right)^{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(4-3\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{5x-1}{3x+3}\right)^{\frac{4}{x-2}}$

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{3x+3}\right)^{\frac{1}{x-4}}$

18. $\lim\limits_{x\to \pi/8}(\operatorname{tg} 2x)^{3\operatorname{tg} 4x}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$

20. $\lim\limits_{x\to \pi}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\arcsin x}}$

5. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Означення. Функція $f(x)$ називається **неперервною** в точці $x = x_0$, якщо границя функції при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці $x = x_0$, тобто

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}.$$

Розглянемо приклад.

❖ Довести неперервність функції $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ в точці $x = 1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо границю даної функції при $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2 + 3x + 1\right) = \left\| 2\cdot(1)^2 + 3\cdot 1 + 1 \right\| = 6.$$

Обчислимо значення функції в точці $x = 1$.

$$f(1) = 2\cdot(1)^2 + 3\cdot{} + 1 = 6.$$

Бачимо, що границя функції та її значення в точці $x = 1$ співпадають, тобто $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Отже, за означенням, функція неперервна в точці $x = 1$.

Означення неперервності функції можна сформулювати більш докладніше.

1. Функція визначена в точці x_0, тобто існує значення $f(x_0)$.
2. Повинна існувати границя функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Мається на увазі існування і рівність однобічних границь $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$.
3. Границя функції в точці x_0 повинна дорівнювати значенню функції в точці x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

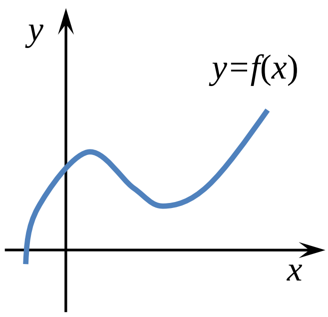

Рисунок 1

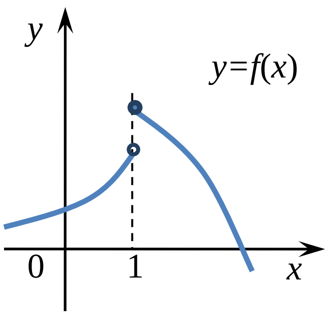

Рисунок 2

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$ неперервну на всій числовій осі (рис. 1). Очевидно, що графік неперервної функції – суцільна лінія. Розглянемо іншу функцію (рис. 2). Ця функція визначена на всій числовій осі, але має розрив в точці $x = 1$. Графік цієї функції не є суцільною лінією.

Однобічні границі. Розглянемо рис. 3. Якщо наближатися вздовж осі OX до точки x_0 зліва $(\rightarrow)$, значення функції наближатимуться до y_0 $(\uparrow)$. Цей факт можна записати наступним чином

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = y_0 .$$

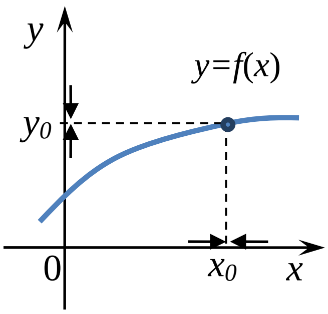

Рисунок 3

"Доданок" "– 0" ("мінус нуль") символізує нескінченно мале від'ємне число, що й означає, що ми наближаємося до числа x_0 з лівого боку.

Так само, якщо наближатися до x_0 справа $(\leftarrow)$, то значення функції наближаються до числа y_0 $(\downarrow)$. Запишемо це так

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = y_0 .$$

"Доданок" "+0" ("плюс нуль") символізує нескінченно мале додатне число, з цього випливає, що ми наближаємося до числа x_0 з правого боку.

Якщо однобічні границі рівні між собою (як у нашому випадку)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

то це означає, що існує границя функції $f(x)$ в точці x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 .$$

Точки розриву функції діляться на дві групи: розриви І роду (кінцеві розриви) і розриви ІІ роду (нескінченні розриви).

Розглянемо приклади.

❖ Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ (x-1)^2; & 1 \le x \le 2 \\ 3 - x; & x > 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Функція неперервна на інтервалах $(-\infty; 1); [1; 2]; (2; +\infty)$. Розрив може мати місце на кінцях інтервалів, тобто в точках, в яких функція міняє аналітичний вираз. Це точки $x=1$ і $x=2$.

Знайдемо однобічні границі функції в цих точках.

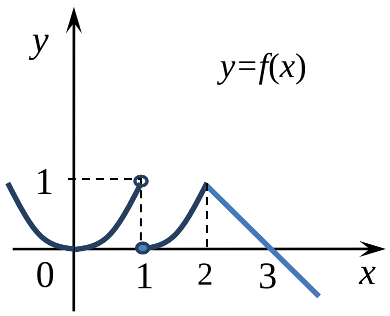

Рисунок 4

$$\lim_{x\to 1-0} x^2 = \left\|(1-0)^2\right\| = 1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} (x-1)^2 = \left\|(1+0-1)^2\right\| = 0.$$

Однобічні границі існують, але їх значення різні, отже $x=1$ – точка розриву І роду –стрибок.

$$\lim_{x\to 2-0} (x-1)^2 = \left\|(2-0-1)^2 = (1-0)^2\right\| = 1;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3-x = \left\|3-(2-0)^2 = 1-0\right\| = 1.$$

Однобічні границі рівні. Визначимо значення функції в точці $x=2$.

$$f(2) = (2-1)^2 = 1.$$

Однобічні границі дорівнюють значенню функції в точці $x=2$, отже у точці $x=2$ функція неперервна. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 4.

❖ Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}.$$

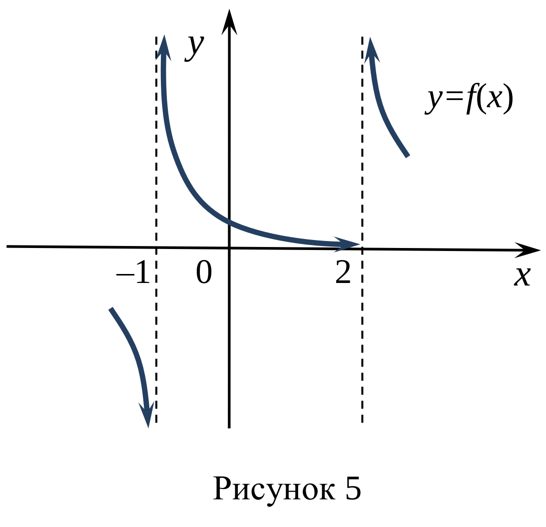

Рисунок 5

Розв'язання. Функція невизначена, якщо $x-2=0$ або $x+1=0$, тому що ці вирази знаходяться у знаменнику, тобто точки можливого розриву функції $x=2$ і $x=-1$.

Обчислимо однобічні границі у точці $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{-1-0-2}}}{-1-0+1}=\frac{5^{\frac{1}{-3-0}}}{-0}=\frac{5^{-\frac{1}{3}}}{-0}\left(5^{-\frac{1}{3}}>0\right)\right\|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{-1+0-2}}}{-1+0+1}=\frac{5^{-\frac{1}{3}}}{+0}\right\|=+\infty.$$

Отже у точці $x=-1$ розрив II роду.

Обчислимо однобічні границі у точці $x=2$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{2-0-2}}}{2-0+1}=\frac{5^{\frac{1}{-0}}}{3}=\frac{5^{-\infty}}{3}=\frac{1}{3\cdot 5^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right\|=0;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{5^{\frac{1}{x-2}}}{x+1}=\left\|\frac{5^{\frac{1}{2+0-2}}}{2+0+1}=\frac{5^{\frac{1}{+0}}}{3}=\frac{5^{+\infty}}{3}\right\|=+\infty.$$

Отже у точці $x=2$ розрив II роду. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 5.

❖ Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x)=\frac{2x^2-32}{x-4}.$$

Розв'язання. Задана функція невизначена, якщо $x-4=0$, тому що цей вираз знаходиться у знаменнику. Отже $x=4$ – точка можливого розриву функції.

Розкладемо чисельник функції на множники:

$$2x^2-32=2\left(x^2-16\right)=2(x-4)(x+4).$$

Маємо

$$f(x)=\frac{2(x-4)(x+4)}{(x-4)}=2x+8.$$

Обчислимо однобічні границі функції при $x\to 4$

$$\lim_{x\to 4-0}2x+8=\|2(4-0)+8\|=16;$$

$$\lim_{x\to 4+0} 2x+8=\|2(4+0)+8\|=16.$$

Однобічні границі рівні, але функція не визначена при $x=4$. Отже, точка $x=4$ – точка розриву I роду (усувний розрив). Графік функції зображено на рисунку 6 а).

Усунемо розрив. Для цього визначимо функцію наступним чином:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-32}{x-4}, & x\neq 4\\ 16, & x=4\end{cases}.$$

Ця функція буде неперервною на всій числовій осі. Графік функції зображено на рисунку 6 б).

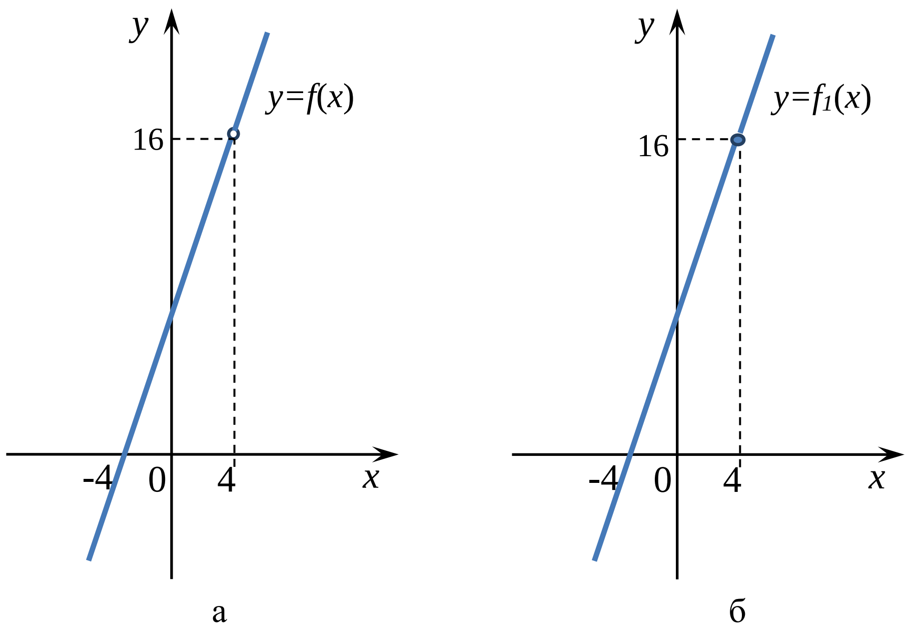

Рисунок 6

❖ Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x)=\frac{x-4}{2x^2-32}.$$

Розв'язання. Розкладемо знаменник на множники:

$$f(x)=\frac{(x-4)}{2(x-4)(x+4)}=\frac{1}{2(x+4)}..$$

Ця функція невизначена, якщо $x+4=0$ і $x-4=0$. Отже $x=-4$ і $x=4$ – точки можливого розриву.

Обчислимо однобічні границі

$$\lim_{x\to -4-0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(-4-0+4)}=\frac{1}{2(-0)}=\frac{1}{-0}\right\|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -4+0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(-4+0+4)}=\frac{1}{2(+0)}=\frac{1}{+0}\right\|=+\infty.$$

Отже, точка $x=-4$ – точка розриву II роду

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(4-0+4)}\right\|=\frac{1}{16};$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{1}{2(x+4)}=\left\|\frac{1}{2(4+0+4)}\right\|=\frac{1}{16}.$$

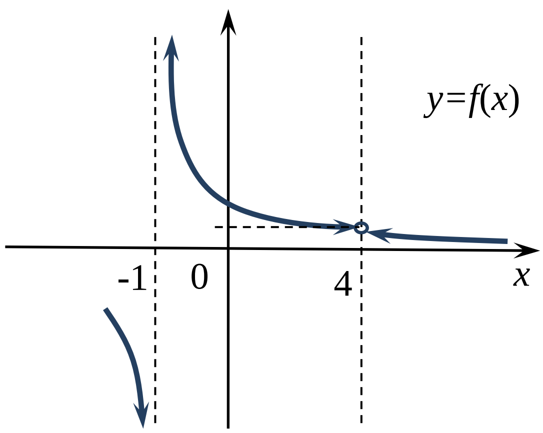

Рисунок 7

У точці $x=4$ однобічні границі рівні, але функція невизначена.

Отже, $x=4$ – точка усувного розриву I роду. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 7.

❖ Дослідити функцію на неперервність. Визначити типи точок розриву функції, якщо вони існують.

$$f(x)=\frac{5x-12}{x^2+11x+30}.$$

Розв'язання. Функція може мати розрив у точках, в яких знаменник дорівнює нулю, тобто

$x^2+11x+30=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{(11)^2-4\cdot 30}}{2}=\frac{-11\pm\sqrt{1212-120}}{2}=\frac{-11\pm 1}{2};$$

$x_1=-6;\ x_2=-5$.

Маємо $x_1=-6;\ x_2=-5$ - точки можливого розриву функції.

Класифікуємо типи точок розриву. Для цього представимо функцію у вигляді $f(x)=\dfrac{5x-12}{(x+6)(x+5)}$ і обчислимо однобічні границі

$$\lim_{x\to -6-0}\frac{5x-12}{(x+6)(x+5)}=\left\|\frac{5(-6-0)-12}{(-6-0+6)(-6-0+5)}=\frac{-42}{-0\cdot(-1)}=\frac{-42}{+0}\right\|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -6+0}\frac{5x-12}{(x+6)(x+5)}=\left\|\frac{5(-6+0)-12}{(-6+0+6)(-6+0+5)}=\frac{-42}{+0\cdot(-1)}=\frac{-42}{-0}\right\|=+\infty .$$

Отже у точці $x=-6$ розрив II роду.

$$\lim_{x\to -5-0}\frac{5x-12}{(x+6)(x+5)}=\left\|\frac{5(-5-0)-12}{(-5-0+6)(-5-0+5)}=\frac{-37}{-0}\right\|=+\infty ;$$

$$\lim_{x\to -5+0}\frac{5x-12}{(x+6)(x+5)}=\left\|\frac{5(-5+0)-12}{(-5+0+6)(-5+0+5)}=\frac{-37}{+0}\right\|=-\infty .$$

Таким чином, у точці $x=-5$ розрив II роду. Графік функції в околі особливих точок зображено на рисунку 8.

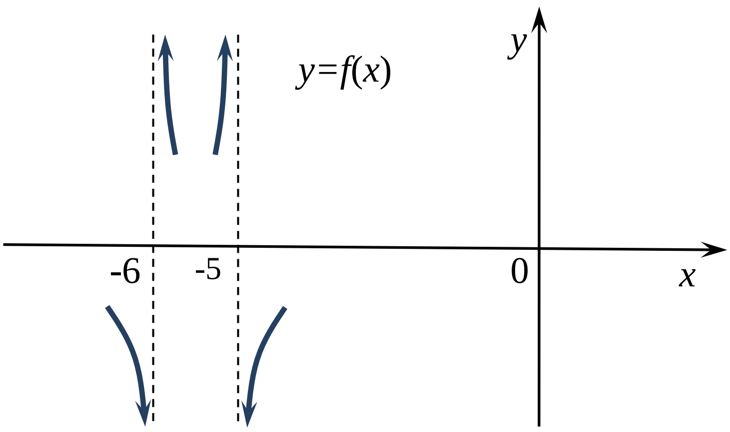

Рисунок 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дослідити функції на неперервність та класифікувати точки розриву

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\neq 0,\\ -2, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\le 0,\\ 2x, & x>0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ 2x, & x\ge 0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$

7. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

8. $f(x)=\dfrac{3x}{x-5}$

9. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

10. $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{3x}$

11. $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

12. $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x^3+1}$

13. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x}$

14. $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$

15. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

16. $f(x)=e^{\frac{x}{x-5}}$

17. $f(x)=2^{\frac{3}{3-x}}$

18. $f(x)=3^{\frac{2x}{x-1}}$

19. $f(x)=\dfrac{8^{\frac{1}{x+1}}}{x-4}$

20. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x^2+1}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г Б. Лінник [та ін.] ; за ред. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 532 с.

2. Сборник задач по высшей математике. / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – Москва : Айрис-прес, 2011. – 592 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб.пособие в 3 ч. Ч.1. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Выш.шк., 1990. – 271 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Границі функції»
з курсу «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей
заочної та прискореної форм навчання

Укладачі: ЛІННИК Ганна Борисівна,
МОРАЧКОВСЬКА Ірина Олегівна

Відповідальний за випуск Л. В. Курпа
Роботу до видання рекомендував Г. В. Руднєва

В авторській редакції

План 2019 р., поз. 161

Підп. до друку 27.06.2019. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк.______.
Наклад 50 прим. Зам. № ______. Ціна договірна.

Видавець
Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач
____
____
____